DE FORMULE VAN HERON

KOEN DE NAEGHEL

SAMENVATTING. In dit overzichtsartikel staat de formule van Heron centraal. Deze formule drukt de oppervlakte van een driehoek uit in functie van de lengtes van de zijden van die driehoek. Naast het gebruikelijke schoolbewijs geven we vier alternatieve, minder bekende bewijzen. Daarbij gaan we een veralgemening tot de oppervlakte van een willekeurige vierhoek niet uit de weg. Het activeren van de vereiste voorkennis en enkele bewijzen zonder woorden maken deze tekst geschikt voor leerlingen vanaf het vierde middelbaar.

INHOUDSOPGAVE

1. INLEIDING

Het leeuwendeel van de leerkrachten wiskunde in het vierde jaar geven, voor de formule van Heron, hetzelfde schoolbewijs. Op zich is dat erg begrijpelijk, omdat het een rechtstreekse toepassing op de cosinusregel is, een leerstofonderdeel dat ook in het vierde jaar aan bod komt. Toch is het zinvol om de leerlingen ook kennis te laten maken met andere, alternatieve bewijzen. Want zoals we bij een bewijs altijd willen, is datgene wat we gaandeweg leren net zo belangrijk als de eindbestemming. Tegelijk kan dit ook hun waardering voor de wiskunde stimuleren: de verwondering die opgewekt wordt door elegante en creatieve redeneringen, en de rijke geschiedenis die daarmee in verband staat. De cultuur dat hedendaagse wiskundigen af en toe nog een nieuwe invalshoek vinden om eeuwenoude formules zoals die van Heron te bewijzen, zal voor velen ongekend en dus ook onbemind zijn. Toch maken ook deze aspecten deel uit van de wiskundige vorming die we aan onze leerlingen willen meegeven.

In een eerste paragraaf bespreken we kort het historisch kader waarin we de formule van Heron kunnen plaatsen. Na een eerste kritische kennismaking met de formule, komen vijf bewijzen aan bod. Het eerste is het schoolbewijs zoals hierboven vermeld. Daarna zien we een bewijs dat enkel gebruik maakt van de stelling van Pythagoras. Het derde bewijs is dat van Ballantine uit 1954 en het vierde komt van Dunham die het in 1985 bedacht heeft. De twee laatstgenoemde bewijzen maken gebruik van de oppervlakte van een driehoek in functie van de straal van de ingeschreven cirkel en een goniometrische identiteit. Ten slotte bespreken we een veralgemening van de formule van Heron om de oppervlakte van een willekeurige vierhoek te berekenen, met het in 1891 opgeschreven bewijs van Hobson. Als bijzonder geval volgt daaruit de formule van Brahmagupta voor de oppervlakte van een koordenvierhoek, die op zijn beurt de formule van Heron voor de oppervlakte van een driehoek impliceert. Op die manier ronden we het vijfde en laatste bewijs af.

We hebben gepoogd om deze tekst op maat van leerlingen van het vierde jaar te schrijven. Om de leesbaarheid te verhogen, hebben we de voorkennis die nodig was om de bewijzen ten volle te begrijpen in afzonderlijke paragrafen geplaatst. Daarin komen een drietal hulpresultaten aan bod. Met het oog op de klaspraktijk voorzien we sommige

Datum: 25 december 2016. Dit artikel is opgedragen aan de wiskundige John Perry Ballantine (1896 - 1970) van wie zijn creatief bewijs van de formule van Heron in de loop der jaren in de vergetelheid geraakte [2].

lemma's ook van een bewijs zonder woorden. Op die manier zijn die hulpresultaten ook overtuigend voor leerlingen die niet vertrouwd zijn met de kennis waarop de formele bewijzen steunen, zoals bijvoorbeeld de verdubbelingsformules voor sinus en tangens. Hoewel bewijzen zonder woorden eigenlijk geen bewijzen zijn maar eerder ideeën van hoe iets kan worden bewezen met behulp van een figuur, zijn ze vaak elegant en blijven ze langer hangen dan een formeel bewijs.

Voor het schrijven van dit overzichtsartikel werd heel wat literatuur doorgenomen, waarin nog talrijke andere bewijzen te vinden zijn. In de laatste paragraaf geven we, zonder de intentie volledig te zijn, een bondig overzicht.

2. Een beknopte geschiedenis

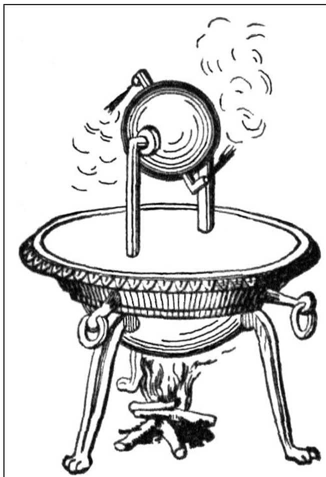
2.1. **Leven en werk.** Heron was een wiskundige en ingenieur uit de klassieke oudheid. In het moderne tijdperk wordt zijn naam soms anders gespeld, zoals Hero of Heroon, eerder te wijten aan de verschillende vertalingen dan de verwijzing naar zijn wiskundige heldendaden. Heron leefde in de stad Alexandrië, genoemd naar Alexander de Grote (356 - 323 v.Chr.) en gelegen in het huidige Egypte. Vandaar dat men spreekt over Heron van Alexandrië.

Over het leven van Heron is zeer weinig bekend. Zelfs over de eeuw waarin hij leefde, bestaat twijfel. Zeker is dat Heron leefde na Apolonius van Perga (ongeveer 262 - 190 v.Chr.), een andere wiskundige uit het oude Griekenland. Daarnaast verwijst Pappus van Alexandrië (ongeveer 290 - 350 n.Chr.), één van de laatste Griekse wiskundigen uit de oudheid, naar Heron. Een direct aanknopingspunt werd pas in 1938 gevonden, toen de wetenschapshistoricus Otto Neugebauer ontdekte dat Heron in z'n werk *Dioptra* verwijst naar een zonsverduistering die zich in Herons leven voltrok [22]. Neugebauer kon, met behulp van Herons beschrijvingen, achterhalen dat die zonsverduistering plaatsvond te Alexandrië en wel op 13 maart 62 n.Chr. om 11 u. 's avonds [5]. Om die reden is het gangbaar om het leven van Heron rond 75 n.Chr. te plaatsen [14].

De geschriften van Heron wijzen erop dat hij les gaf in de bibliotheek van Alexandië. Sommige van zijn werken zijn duidelijk leerboeken, die gaan over wiskunde en natuurkunde, zoals mechanica en de studie van samengeperste gassen [5].

Heron toonde een grote interesse in praktische toepassingen. Hij besprak de nuttige werking van mechanica en de kunst van het opmeten. Zo legde hij in zijn *Dioptra* uit hoe tunnels door bergen moesten worden gegraven en hoe de hoeveelheid water, dat uit een bron opwelt, kan worden gemeten [12].

Zijn visie op de rol van de wiskunde in de maatschappij maakte van Heron een toegepast wiskundige *avant la lettre*. In zijn werken beschreef hij honderden machines, waaronder een brandweervoertuig, een windorgel en een verkoopautomaat. Zijn meest bekende uitvinding is een zogenaamde *aeolipile*: een luchtdichte kamer die opgewarmd wordt en gaat ronddraaien door de ontsnappende stoom die langs buisjes geleid wordt. Hoewel Vitrivius al eerder een aeolipile vermeldde, was het Heron die voor het eerst draaiende onderdelen beschreef (zie Figuur 1). Herons machine is het vroegst bekende voorbeeld van een stoommachine, dat pas verder ontwikkeld werd in de 18e eeuw. Zijn uitvinding wordt zelfs beschouwd als een voorloper van de straalmotor en de raket [32].



Figuur 1: de klassieke aeolipile van Heron [32].

2.2. **Herons verloren bewijs.** Wiskundigen associëren Heron met de formule die de oppervlakte van een driehoek uitdrukt in functie van de lengtes van de zijden (zie paragraaf 3). Deze eigenschap heeft, net zoals vele andere onderwerpen die Heron bestudeerd heeft, duidelijk een praktisch nut. Het bewijs dat Heron van deze formule gaf is evenwel van een heel andere orde: een opmerkelijk staaltje van abstract meetkundig redeneren. Het verscheen als Propositie I.8 in Herons *Metrica*, een werk dat op zich een bewogen geschiedenis kent en dat we hieronder zullen beschrijven.

Voor lange tijd was de bibliotheek van Alexandrië, dat gesticht werd rond 300 v.Chr., het centrum van de Westerse kennis in de oudheid. Op het hoogtepunt in de eerste eeuw v.Chr. bevatte de bibliotheek tot 700 000 boekrollen. Door deze concentratie van informatie over allerlei wetenschappen en kennisgebieden trok de bibliotheek bewust studenten en geleerden uit de hele beschaafde wereld aan. De bibliotheek fungeerde niet alleen als materiële bewaarplaats van het collectief geheugen, maar werd ook uitgebouwd tot een heus studiecentrum. Vooraanstaande wetenschappers, waaronder Euclides, Archimedes en ook Heron, vestigden zich in Alexandrië om van de bibliotheek gebruik te maken [33].

Na de dood van Heron bleef de bibliotheek van Alexandrië actief tot 529 n.Chr., waarna de christenen het tot sluiting dwongen omwille van de grote collectie van heidense documenten. De boekverbranding van de Arabieren in 641 n.Chr. was dan weer het resultaat van het legendarische order van generaal Amr ibn al-As:

> "*Ofwel zijn de boeken in strijd met de Koran en in dat geval is het ketterij, en anders zijn ze in overeenstemming met de Koran en dus overbodig.*"

Naar verluidt zou de gehele inhoud van de bibliotheek, op de werken van Aristoteles na, zijn vernietigd. Gelukkig werd een aanzienlijk deel van de overgebleven boeken in de loop der tijd naar andere bibliotheken versleept, waaronder die van Constantinopel. Bovendien hebben heel wat historici doorheen de geschiedenis de antieke werken uit de oudheid besproken. Zo schreef de Oud-Griekse wiskundige Eutocius van Ascalon in de zesde eeuw na Christus een aantal commentaren over verhandelingen van Archimedes en Apollonius van Perga [3]. In één van zijn commentaren verwijst Eutocius naar Herons *Metrica*. Door deze referentie hadden wiskundigen sindsdien weet van de verhandeling van Heron. Helaas ontbrak elk ander spoor.

Alles wees erop dat de *Metrica*, en dus ook het oorspronkelijk bewijs van de formule van Heron, voorgoed verloren was gegaan. Tot de wiskundige en historicus Paul Tannery in 1894 een fragment van de *Metrica* in een Persisch manuscript uit de dertiende eeuw vond. Twee jaar later vond R. Schöne in Constantinopel het volledige werk terug, verborgen in een manuscript uit de elfde eeuw. Op die manier kwam de *Metrica* samen met Herons het bewijs van de naar hem genoemde formule in de handen van de moderne tijd [12].

2.3. **Heron of Archimedes?** Hoewel de formule van Heron toegeschreven wordt aan Heron, vonden geschiedkundigen een merkwaardigheid in een oud Arabisch manuscript, geschreven door de Perzische wiskundige Abu Al Rayhan Muhammad al-Biruni (973 - 1048). Al-Biruni schreef de formule niet aan Heron toe, maar aan Archimedes van Syracuse (287 - 212 v.Chr.), zie [29, p.228, p.277] en ook [1, voetnoot 1]. Hoewel we niet beschikken over werken van Archimedes die deze formule bevatten, lag hij zeker binnen het bereik van Archimedes, die met voorsprong de grootste wiskundige van de oudheid en zelfs een van de beste wiskundigen aller tijden was.

Ondanks deze relevante aanwijzing hoeven we niet te pleiten voor een historische rechtzetting in het nadeel van Heron. We scharen ons achter de visie van William Dunham [12, p.127], die stelt:

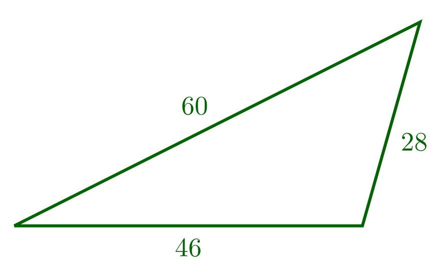
> "*It may be best to allow Heron his moment in the sun. Crediting this result to Archimedes rather than Heron seems unnecessarily generous to the former, whose reputation is already unsurpassed among classical mathematicians, and seems unnecessarily cruel to the latter, whose reputation rests so much upon it.*"

3. Kennismaking met de formule van Heron

Met de formule van Heron kunnen we de oppervlakte van een driehoek berekenen. Zo'n formule lijkt op het eerste zicht overbodig, omdat de bekende standaardformule

$$\text{opp. driehoek} = \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2}$$

zowel eenvoudig als gemakkelijk te gebruiken is. Toch kan deze basisformule niet meteen gebruikt worden om de oppervlakte van de driehoek in Figuur 2 te berekenen: daarvoor moet bijvoorbeeld eerst de hoogte vanop de basis met lengte 46 gekend zijn.



Figuur 2

Het is zinvol om op te merken dat als we van een driehoek de lengtes van de drie zijden kennen, de oppervlakte van die driehoek vastligt. Inderdaad, hebben we een tweede driehoek waarvan de lengtes van de zijden ook gelijk zijn aan 46, 60 en 28, dan is die tweede driehoek congruent met de driehoek in Figuur 2 (gebruik het congruentiekenmerk zijde-zijde-zijde). Maar dan is ook de oppervlakte van die tweede driehoek gelijk aan de oppervlakte van de driehoek in Figuur 2.

Nu we weten dat de oppervlakte van een driehoek bepaald moet zijn door de lengtes van de zijden, kunnen we ons afvragen hoe we die oppervlakte via die drie lengtes kunnen berekenen. Het antwoord wordt gegeven door de zogenaamde *formule van Heron*:

$$\text{opp. driehoek} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{1}$$

waarbij a, b en c staan voor de lengtes van de drie zijden van de driehoek en s gelijk is aan de halve omtrek (Engelse term: *semiperimeter*):

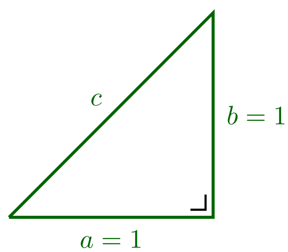
$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Zo is voor de driehoek in Figuur 2 de halve omtrek gelijk aan $s = \frac{46+60+28}{2} = 67$. De formule van Heron geeft dan:

$$\text{opp. driehoek} = \sqrt{67 \cdot (67-46) \cdot (67-60) \cdot (67-28)} = \sqrt{384\,111} = 21\sqrt{871} = 619{,}76\ldots$$

In plaats van de formule van Heron meteen te bewijzen, vinden we het zinvoller om die formule eerst eens kritisch onder de loep te houden. Dat doen we door de formule te onderwerpen aan zes testen.

(1) **De test op een specifiek geval** controleert formule (1) voor een welbepaalde driehoek, bijvoorbeeld de rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekszijden beide lengte $a = b = 1$ hebben, zie Figuur 3.



Figuur 3

De oppervlakte van deze driehoek kan gevonden worden met de basisformule

$$\text{opp. driehoek} = \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Om formule (1) te controleren, hebben we eerst de lengte van de schuine zijde nodig. Uit de stelling van Pythagoras volgt dat $c = \sqrt{2}$. De halve omtrek is dan gelijk aan $s = \frac{1+1+\sqrt{2}}{2} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ en formule (1) geeft ons, na een nuttige rekenoefening, inderdaad het correcte resultaat:

$$\begin{aligned}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} &= \sqrt{\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \\ &= \sqrt{\left(1^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) **De test op eenheden** houdt in dat, als we rekening houden met de eenheden, formule (1) wel degelijk de eenheid van een oppervlakte weergeeft. Zo vinden we voor de zijden in Figuur 2, uitgedrukt in millimeter, dat

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{384\,111\ \text{mm}^4} = 619{,}76\ldots\ \text{mm}^2$$

waarbij mm^2 inderdaad de eenheid van oppervlakte voorstelt.

(3) **De test op symmetrie** gaat na of formule (1) symmetrisch is ten opzichte van de lengtes van de zijden. Verwisselen we bijvoorbeeld de letters a en b dan blijft het eindresultaat van de formule inderdaad hetzelfde.

(4) **De test op verschalen** controleert of formule (1) geldig blijft wanneer we de driehoek vergroten of verkleinen. Maken we bijvoorbeeld elke zijde dubbel zo lang (schaalfactor twee) dan verkrijgen we een gelijkvormige driehoek met zijden $2a$, $2b$, $2c$ en halve omtrek $2s$. Toepassen van de formule (1) geeft

$$\sqrt{2s(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)} = 4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

waaruit blijkt dat na het verschalen van de driehoek met factor twee de oppervlakte van de driehoek inderdaad vier keer zo groot wordt.

(5) **De test op een zinvolle uitdrukking** gaat na of we voor elke driehoek de lengtes a, b en c op een zinvolle manier in de uitdrukking $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ kunnen invullen. Wil dat het geval zijn dan moet, omwille van de vierkantwortel, het product van de factoren $s(s-a)(s-b)(s-c)$ steeds positief zijn. Alvast is zeker $s > 0$. Laten we eens nagaan in welke gevallen de tweede factor positief is:

$$\begin{aligned} 0 < s - a \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{a+b+c}{2} - a \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < \frac{-a+b+c}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad a < b + c. \end{aligned}$$

Omdat we uitgaan van een driehoek, is de lengte van elke zijde steeds kleiner dan de som van de lengtes van de twee andere zijden. Er geldt dus steeds dat $a < b + c$ en dus ook dat $s - a > 0$. Analoog is ook altijd voldaan aan $s - b > 0$ en $s - c > 0$, zodat de uitdrukking $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ voor elke driehoek zinvol is.

(6) **De test op limietovergang** houdt in dat formule (1) geldig blijft wanneer we de lengte van één zijde van de driehoek laten naderen naar nul. Dat kan bijvoorbeeld door een hoekpunt van de driehoek langs een aangrenzende zijde naar een ander hoekpunt te verschuiven. In dat proces vervormen we de driehoek. Uiteindelijk vallen twee hoekpunten samen en krijgen we een lijnstuk, dat logischerwijze oppervlakte nul heeft. Laten we c naar nul naderen, dan zal b evolueren naar a en in de limiet wordt formule (1)

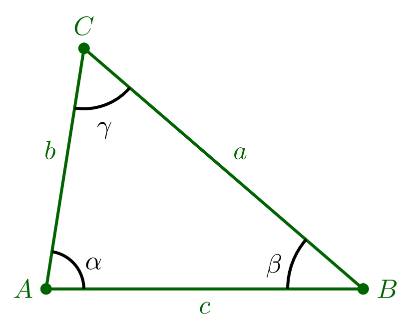
$$\text{opp. } \Delta ABA = \sqrt{s(s-a)(s-a)s} \qquad \text{waarbij } s = \frac{a+a+0}{2} = a$$

hetgeen inderdaad uitdrukt dat de oppervlakte van lijnstuk $[AB]$ gelijk is aan nul.

Hoewel de formule van Heron glansrijk slaagt op elk van deze testen, is dat nog geen bewijs dat de formule klopt voor elke driehoek. In paragraaf 5 zullen we een eerste bewijs zien. Daarvoor activeren we eerst wat voorkennis.

4. Voorkennis deel 1 - Notaties, Pythagoras en de cosinusregel

Zoals gebruikelijk zullen we voor een driehoek met hoekpunten A, B en C (kortweg ΔABC) de binnenhoek $\widehat{A}$ noteren als α en de lengte van de zijde tegenover hoekpunt A noteren als a, zie Figuur 4. Analoog is $b = |CA|$ met overstaande hoek $\widehat{B} = \beta$ en $c = |AB|$ met overstaande hoek $\widehat{C} = \gamma$.



Figuur 4: notaties in ΔABC.

In het geval de hoek α een rechte hoek is, dan geldt de volgende betrekking tussen de zijden, die we de *stelling van Pythagoras* noemen (derde middelbaar):

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

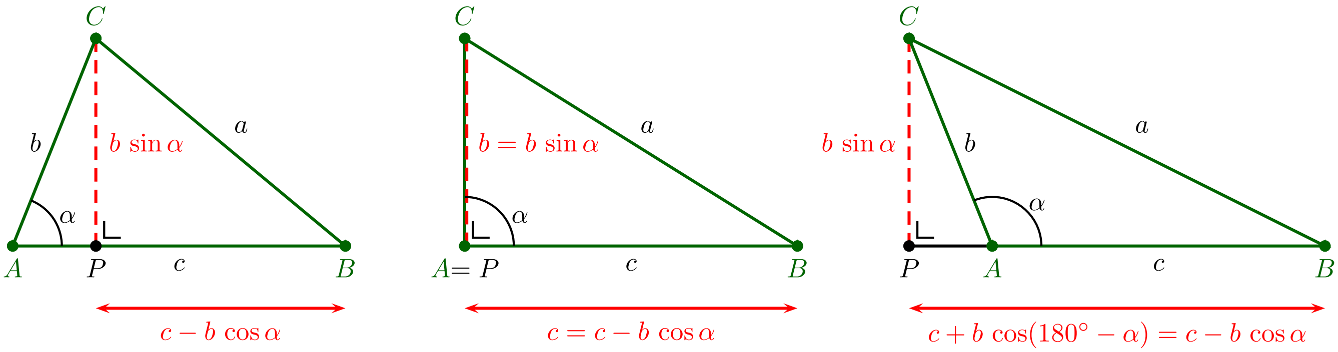
Is de hoek α geen rechte hoek, dan geldt een soortgelijke formule, waarbij het rechterlid $b^2 + c^2$ gercorrigeerd wordt. Deze betrekking staat bekend als de *cosinusregel* en behoort tot de leerstof wiskunde van het vierde middelbaar. Meestal wordt de formule bewezen door drie gevallen te onderscheiden (α scherp, recht en stomp) en de formule in elk geval afzonderlijk aan te tonen. Door een kleine aanpassing kunnen deze drie gevallen tot één berekening worden teruggeschroefd. Dat zullen we hieronder laten zien.

Lemma 1 (cosinusregel). Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B en C. Dan geldt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

Analoog geldt ook dat $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\beta$ en $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Bewijs. Vanuit het hoekpunt C tekenen we de *hoogtelijn* CP: dat is de loodlijn uit C op de rechte AB. Het gevalsonderscheid in Figuur 5 laat zien dat ΔBCP steeds een rechthoekige driehoek is met schuine zijde a en rechthoekszijden $b \sin\alpha$ en $c - b\cos\alpha$.



Figuur 5: ΔBCP in het geval α een scherpe, rechte of stompe hoek is.

Passen we in de rechthoekige driehoek BCP de stelling van Pythagoras toe, dan vinden we:

$$\begin{aligned} a^2 &= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2 \\ &= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha \\ &= b^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha. \end{aligned}$$

□

5. Het schoolbewijs

In deze paragraaf geven we het bewijs van de formule van Heron zoals het meestal in het vierde jaar van het middelbaar onderwijs wordt gezien. Dit is het meest courante bewijs van de formule, zie bijvoorbeeld [7, p.12] en [23, p.7]. Het bewijs steunt op de cosinusregel (zie paragraaf 4).

Stelling (formule van Heron). Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B en C. Dan geldt:

$$\text{opp. } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{waarbij } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Schoolbewijs. Uit Figuur 5 hierboven volgt dat opp. $\Delta ABC = \frac{\text{basis}\times\text{hoogte}}{2} = \frac{1}{2}\, bc\sin\alpha$. Met de grondformule van de goniometrie kunnen we $\sin\alpha$ uitdrukken in functie van $\cos^2\alpha$:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Merk op dat $\sin\alpha > 0$, want $b\sin\alpha$ is de lengte van de zwaartelijn uit C en dus positief, zodat $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$. Vervangen in de vorige uitdrukking voor de oppervlakte van ΔABC leidt tot:

$$\text{opp. } \Delta ABC = \frac{1}{2}\, bc\sqrt{1-\cos^2\alpha}.$$

Met de cosinusregel kunnen we $\cos^2\alpha$ in functie van de zijden a, b en c schrijven:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad\Rightarrow\quad \cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

zodat

$$\begin{aligned} \text{opp. } \Delta ABC &= \frac{1}{2}\, bc\sqrt{1 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2c^2}} \\ &= \frac{1}{2}\, bc\, \frac{1}{2bc}\, \sqrt{4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2} \\ &= \frac{1}{4}\, \sqrt{(2bc)^2 - (b^2+c^2-a^2)^2}. \end{aligned}$$

Onder het wortelteken merken we een verschil van twee kwadraten op, die we kunnen ontbinden in factoren. Daarna vinden we, dankzij twee merkwaardige producten, opnieuw een verschil van twee kwadraten:

$$\begin{aligned}
\text{opp. } \Delta ABC &= \frac{1}{4}\sqrt{\big(2bc-(b^2+c^2-a^2)\big)\big(2bc+(b^2+c^2-a^2)\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(a^2-(b^2-2bc+c^2)\big)\big((b^2+2bc+c^2)-a^2\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(a^2-(b-c)^2\big)\big((b+c)^2-a^2\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(a-(b-c)\big)\big(a+(b-c)\big)\big((b+c)-a\big)\big((b+c)+a\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a-b+c)(a+b-c)(b+c-a)(a+b+c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)2s} \\
&= \sqrt{(s-b)(s-c)(s-a)s}.
\end{aligned}$$

Herschikken van de factoren vervolledigt het bewijs van de formule van Heron. □

Merk op dat het schoolbewijs van de formule van Heron, mede door het uitschrijven van alle stappen, vrij lang is. Sommigen vinden dit bewijs ook niet zo elegant. Dat heeft wiskundigen ertoe aangezet om te zoeken naar andere bewijzen. Het meest bekende voorbeeld hiervan zien we in de volgende paragraaf.

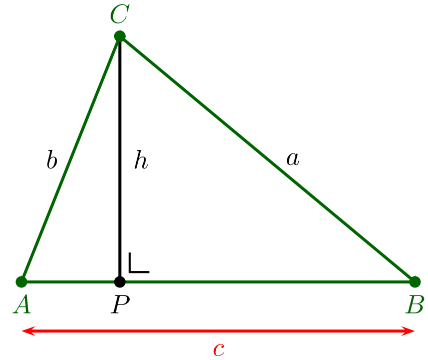
6. Het bewijs van Raifaizen

Omdat de cosinusregel kan bewezen worden met de stelling van Pythagoras, moeten we dus ook de formule van Heron kunnen bewijzen zonder expliciet gebruik te maken van de cosinusregel. Dat leidt tot een variant van het schoolbewijs, met als voordeel dat het al begrepen kan worden van zodra de stelling van Pythagoras gekend is (derde middelbaar). Het bewijs vonden we terug in een publicatie van Claude Raifaizen uit 1941, zie [26]. Zijn gedachtegang is echter zo logisch dat het verwonderlijk zou zijn mocht, in een tijdspanne van bijna tweeduizend jaar, niemand voor hem een soortgelijke berekening gemaakt hebben. Maar zolang deze referenties ontbreken, zullen we dit bewijs aan Raifaizen blijven toekennen: wie schrijft, die blijft!

Stelling (formule van Heron). Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B en C. Dan geldt:

$$\text{opp. } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{waarbij } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bewijs van Raifaizen [26]. In elke driehoek zal, voor minstens één hoekpunt, de loodlijn uit dat punt op de overstaande zijde (hoogtelijn) die zijde ook snijden. Na eventueel de hoekpunten opnieuw te benoemen, mogen we aannemen dat C zo'n hoekpunt is. Noem P het snijpunt van de hoogtelijn uit C met de zijde $[AB]$, zie Figuur 6.



Figuur 6: hoogtelijn uit C.

Alvast is

$$\text{opp. } \Delta ABC = \frac{\text{basis} \times \text{hoogte}}{2} = \frac{1}{2}\, ch.$$

Willen we de oppervlakte van ΔABC in functie van de zijden a, b en c schrijven, dan moeten we dat eerst voor de lengte h doen. We zoeken dus eerst een formule voor h in termen van de letters a, b en c.

Uit de stelling van Pythagoras volgt:

$$\begin{aligned}
c = |AP| + |PB| \quad &\Rightarrow \quad c = \sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2} \\
&\Rightarrow \quad c - \sqrt{b^2 - h^2} = \sqrt{a^2 - h^2} \\
&\Rightarrow \quad \left(c - \sqrt{b^2 - h^2}\right)^2 = a^2 - h^2 \\
&\Rightarrow \quad c^2 - 2c\sqrt{b^2 - h^2} + b^2 - h^2 = a^2 - h^2 \\
&\Rightarrow \quad b^2 + c^2 - a^2 = 2c\sqrt{b^2 - h^2} \\
&\Rightarrow \quad (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4c^2(b^2 - h^2) \\
&\Rightarrow \quad (b^2 + c^2 - a^2)^2 = 4b^2c^2 - 4c^2h^2 \\
&\Rightarrow \quad h = \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}.
\end{aligned}$$

Analoog aan het schoolbewijs hierboven verkrijgen we dan:

$$\begin{aligned}
\text{opp. } \Delta ABC &= \frac{1}{2}\, ch \\
&= \frac{1}{2}\, c\, \frac{1}{2c}\sqrt{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(2bc - (b^2 + c^2 - a^2)\big)\big(2bc + (b^2 + c^2 - a^2)\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)\big)\big((b^2 + 2bc + c^2) - a^2\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(a^2 - (b - c)^2\big)\big((b + c)^2 - a^2\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\big(a - (b - c)\big)\big(a + (b - c)\big)\big((b + c) - a\big)\big((b + c) + a\big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a - b + c)(a + b - c)(b + c - a)(a + b + c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2s - 2b)(2s - 2c)(2s - 2a)2s} \\
&= \sqrt{(s - b)(s - c)(s - a)s}.
\end{aligned}$$

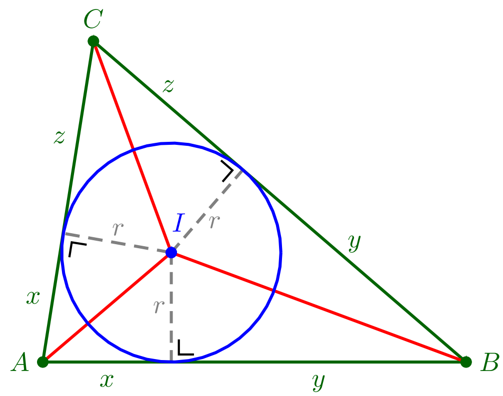
□

In het bewijs heeft Raifaizen de formule voor h verkregen vanuit de irrationale identiteit $c = \sqrt{b^2 - h^2} + \sqrt{a^2 - h^2}$. De manier waarop dit gebeurt, doet denken aan een techniek gebruikt wordt bij het oplossen van irrationale vergelijkingen, een onderwerp dat in het vijfde jaar van het middelbaar onderwijs aan bod komt. Om die reden lijkt dat ons een goeie plaats om de soms doelloos ogende berekeningen te doorspekken met dit alternatief bewijs van de formule van Heron.

Het bewijs van Raifaizen illustreert dat de stelling van Pythagoras leidt tot de formule van Heron, maar ook het omgekeerde is waar: de formule van Heron kan gebruikt worden om de stelling van Pythagoras te bewijzen. Deze twee resultaten uit de klassieke oudheid zijn dus equivalent. Voor een bewijs hiervan verwijzen we naar [25].

7. Voorkennis deel 2 - De ingeschreven cirkel en twee goniometrische identiteiten

In een driehoek is de *bissectrice* van een binnenhoek de rechte die deze hoek in twee gelijke hoeken verdeeld. In elke driehoek gaan de bissectrices van de drie hoeken door één punt I, het zogenaamde *middelpunt* van de driehoek. Omdat een bissectrice van een hoek ook de meetkundige plaats van de punten met gelijke afstanden tot de benen van de hoek is, zal de afstand van het middelpunt tot elk van de drie zijden van de driehoek gelijk zijn, wat we met r noteren. Tekenen we een cirkel met middelpunt I en straal r, dan zal deze cirkel raken aan elk van de drie zijden van de driehoek (Figuur 7). Bijgevolg staat elke zijde loodrecht op de middellijn die door het raakpunt van die zijde gaat. Deze cirkel wordt de *ingeschreven cirkel* van de driehoek genoemd.



Figuur 7: de ingeschreven cirkel.

Door het middelpunt van de ingeschreven cirkel met elk raakpunt te verbinden, wordt de driehoek in zes rechthoekige driehoeken verdeeld. Elke rechthoekige driehoek heeft een rechthoekszijde met als lengte de straal van de ingeschreven cirkel r. Twee rechthoekige driehoeken die grenzen aan dezelfde bissectrice van ΔABC zijn congruent, zodat de overblijvende rechthoekszijden kunnen benoemd worden als x, y en z zoals op Figuur 7.

Het volgende hulpresultaat was al bekend in de klassieke oudheid en zal, zoals we later zullen zien, een hoofdrol spelen in enkele andere bewijzen van de formule van Heron. We vermelden ook een bewijs zonder woorden uit de hand van Roger Nelsen dat door de lezer zeker gesmaakt zal worden.

Lemma 2. De oppervlakte van een driehoek ABC is gelijk aan het product rs, waarbij r staat voor de straal van de ingeschreven cirkel en s staat voor de halve omtrek van de driehoek:

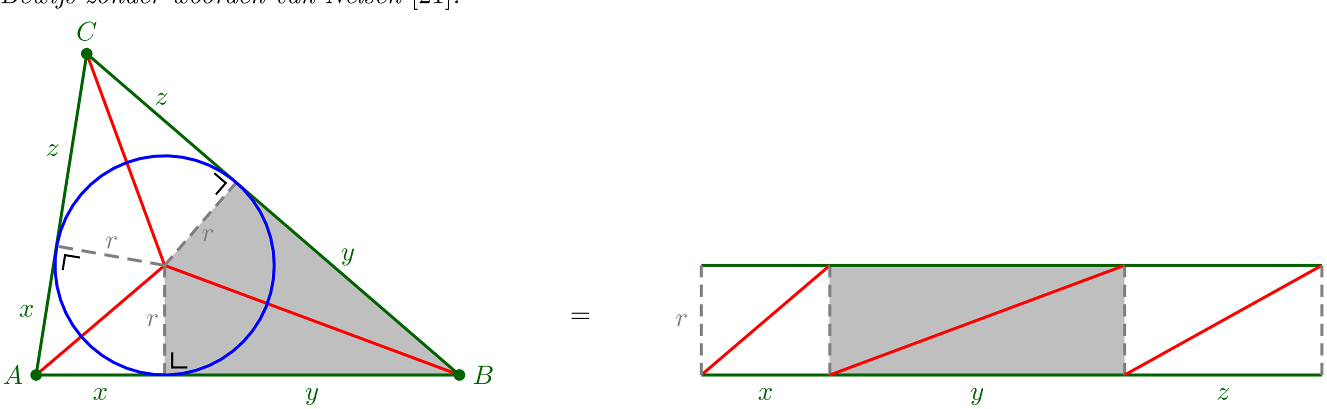
$$\text{opp. } \Delta ABC = rs.$$

Bewijs. Uit de notaties van Figuur 7 hierboven volgt:

$$\begin{aligned} \text{opp. } \Delta ABC &= \text{opp. } \Delta ABI + \text{opp. } \Delta BCI + \text{opp. } \Delta CAI \\ &= \frac{1}{2}cr + \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = rs. \end{aligned}$$

□

Bewijs zonder woorden van Nelsen [21].



Figuur 8: opp. $\Delta ABC = r(x+y+z) = rs.$ □

Het resultaat uit Lemma 2 kan veralgemeend worden naar een veelhoek waarvan alle zijden raken aan eenzelfde cirkel. Zo'n veelhoek wordt een *omgeschreven veelhoek* genoemd. Noemen we r de straal van die ingeschreven cirkel en s de halve omtrek van de omgeschreven veelhoek, dan is de oppervlakte van die veelhoek gelijk aan rs.

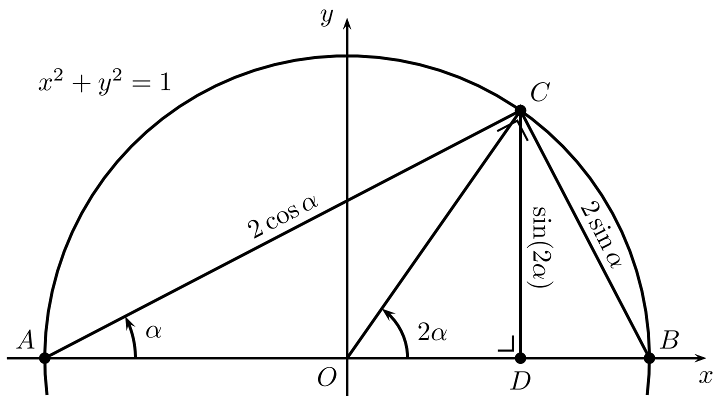
We sluiten deze voorkennis af met twee goniometrische identiteiten. De formele bewijzen maken deel uit van de leerstof goniometrie die in de derde graad van het middelbaar onderwijs aan bod komt. De bewijzen zonder woorden zijn opnieuw van Roger Nelsen. Ze maken deze resultaten ook toegankelijk voor de tweede graad.

Lemma 3 (verdubbelingsformule voor de sinus). Voor elke georiënterde hoek α is $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

Bewijs dat steunt op de somformule voor de sinus uit de derde graad.

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \square$$

Bewijs zonder woorden van Nelsen [20, p.34] *voor scherpe hoeken α.*



Figuur 9: $\Delta ACD \sim \Delta ABC$ zodat $\dfrac{|CD|}{|AC|} = \dfrac{|BC|}{|AB|}$.

$\square$

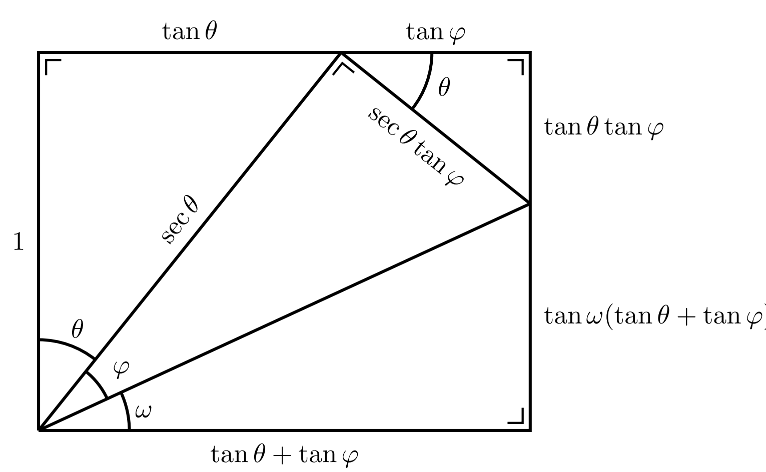
Lemma 4. In een driehoek ABC geldt de goniometrische identiteit

$$1 = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}\right) + \tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) + \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

Bewijs dat steunt op de somformule voor de tangens uit de derde graad.

$$1 = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\tan\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right) = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)+\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{\beta}{2}\right)\tan\left(\frac{\gamma}{2}\right)}. \qquad \square$$

Bewijs zonder woorden van Nelsen [21].



Figuur 10: $\tan\theta\tan\varphi + \tan\varphi\tan\omega + \tan\omega\tan\theta = 1$.

$\square$

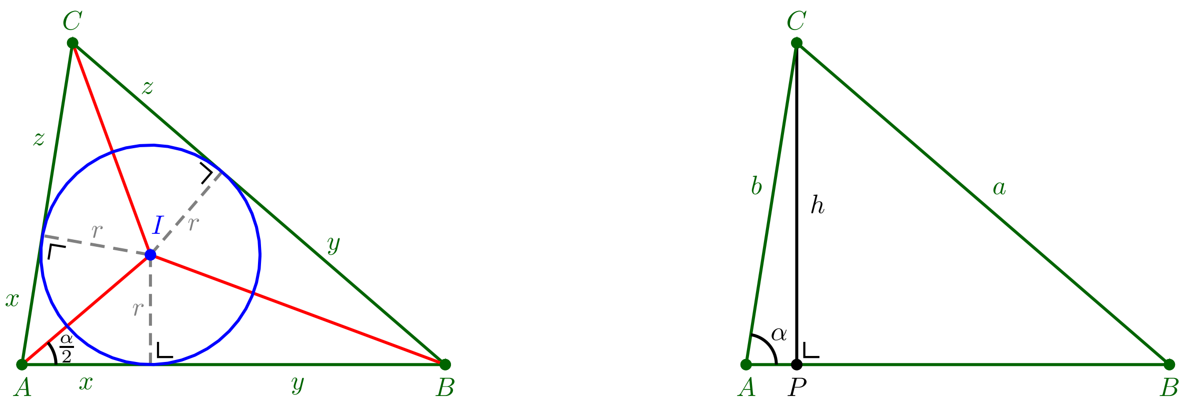
8. Het bewijs van Dunham

Voor wie een eenvoudig bewijs van de formule van Heron wil, is er het bewijs van William Dunham uit 1985. Het maakt gebruik van de formule voor de oppervlakte van een driehoek in functie van de straal van de ingeschreven cirkel (Lemma 2) en de verdubbelingsformule van de sinus (Lemma 3) die we in de vorige paragraaf besproken hebben. Dit bewijs illustreert de kracht van de goniometrie.

Stelling (formule van Heron). Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B en C. Dan geldt:

$$\text{opp. } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{waarbij } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bewijs van Dunham [11]. In Figuur 11 hieronder beschouwen we ΔABC op twee manieren: aan de linkerkant werd de ingeschreven cirkel met middelpunt I getekend, aan de rechterkant de *hoogtelijn* uit hoekpunt C: dat is de rechte door CP die loodrecht op de tegenoverliggende zijde staat. De lengte van het lijnstuk $[CP]$ noemen we h.



Figuur 11: de ingeschreven cirkel en de hoogtelijn uit C.

Uit de linkerfiguur leiden we af dat

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{\sqrt{r^2+x^2}} \quad \text{en} \quad \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{r^2+x^2}},$$

en uit de rechterfiguur volgt dat $\sin\alpha = \frac{h}{b}$. Uit de verdubbelingsformule voor de sinus (Lemma 3) volgt nu dat

$$h = b\sin\alpha = b\left(2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = b\,\frac{2rx}{r^2+x^2} = (x+z)\,\frac{2rx}{r^2+x^2},$$

zodat wegens Lemma 2 geldt:

$$rs = \text{opp. } \Delta ABC = \frac{1}{2}\,|AP|\cdot|CP| = \frac{1}{2}\,(x+y)h = \frac{1}{2}(x+y)(x+z)\,\frac{2rx}{r^2+x^2},$$

samengevat:

$$rs = \frac{1}{2}(x+y)(x+z)\,\frac{2rx}{r^2+x^2}.$$

Kruislings vermenigvuldigen en vereenvoudigen levert:

$$s(r^2+x^2) = x(x+y)(x+z) = x\,(x(x+y+z)+yz) = x(xs+yz).$$

zodat

$$\begin{aligned} & s(r^2+x^2) = x(xs+yz) \\ \Rightarrow\quad & sr^2 + sx^2 = x^2s + xyz \\ \Rightarrow\quad & sr^2 = xyz. \end{aligned}$$

Maar dan is, opnieuw wegens Lemma 2,

$$\text{opp. } \Delta ABC = rs = \sqrt{s(sr^2)} = \sqrt{s(xyz)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

waarmee we de formule van Heron aangetoond hebben. $\square$

9. Het bewijs van Ballantine

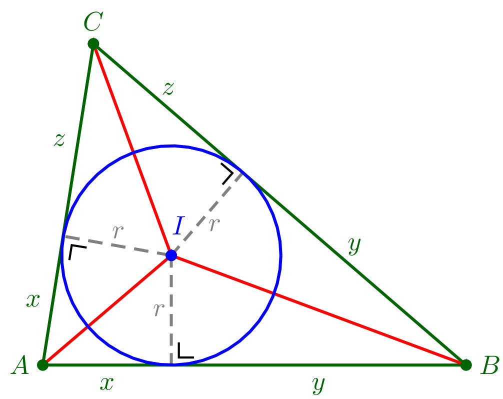
In 1954 publiceerde John Perry Ballantine (1896-1970) een kort en elegant bewijs van de formule van Heron. Nadien werd zijn bewijs meermaals opnieuw gepubliceerd, maar zonder hierbij te verwijzen naar Ballantine en zijn origineel artikel. Dat gebeurde onder meer in 1984 door David Dobbs [9] en in 1993 door Barney Oliver [24]. Sindsdien werd Ballantines creatieve bewijs vaak toegeschreven aan Oliver of Dobbs, ten onrechte en wellicht uit onwetendheid. Dat gebeurde onder meer in de historische overzichten van William Dunham [13, Chapter 7] in 1991 en Ellina Grigorieva [16, Chapter 1] in 2013. Roger Nelsen had het in 2001 dan weer juist, toen hij in zijn bewijs zonder woorden van Lemma 2 en Lemma 4 hierboven de referentie naar het artikel van Ballantine uit 1954 gaf [21].

Het bewijs van Ballantine geldt als één van de kortste en meest elegante bewijzen van de formule van Heron. Zijn bewijs mocht in dit artikel dan ook niet ontbreken. Bovendien zetten we daarmee, in het licht van de hierboven beschreven historiek, het originele artikel van Ballantine terug op de voorgrond.

Stelling (formule van Heron). Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B en C. Dan geldt:

$$\text{opp. } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{waarbij } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bewijs van Ballantine [2]. We beschouwen opnieuw de ingeschreven cirkel van de driehoek, zie paragraaf 7.



Figuur 12: de ingeschreven cirkel.

Met deze notaties leiden we af dat

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x+y+z = x+a,$$

zodat $s-a=x$. Analoog is $s-b=y$ en $s-c=z$. Zo vinden we:

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{r}{s-a}, \quad \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) = \frac{r}{s-b} \quad \text{en} \quad \tan\left(\frac{\gamma}{2}\right) = \frac{r}{s-c}.$$

De goniometrische identiteit uit Lemma 4 geeft dan:

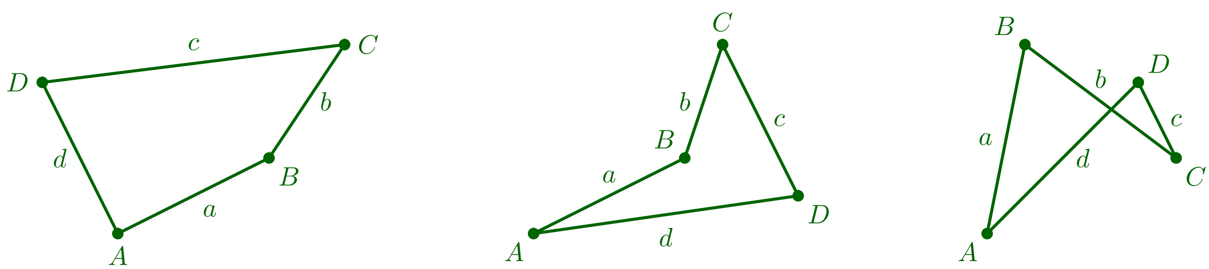
$$\begin{aligned} 1 &= \frac{r^2}{(s-a)(s-b)} + \frac{r^2}{(s-b)(s-c)} + \frac{r^2}{(s-c)(s-a)} \\ &= \frac{r^2(s-c+s-a+s-b)}{(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \frac{r^2 s}{(s-a)(s-b)(s-c)} \end{aligned}$$

zodat $r^2s^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$. Uit Lemma 2 volgt nu dat opp. $\Delta ABC = rs = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. $\square$

10. Voorkennis deel 3 - Koordenvierhoeken en vierhoeken

In de loop van het middelbaar onderwijs komen verschillende soorten vierhoeken aan bod. Zo maken we bijvoorbeeld een onderscheid tussen vierkant, rechthoek, ruit, trapezium en parallellogram. In deze paragraaf komen enkele eigenschappen van andere, meer algemene vierhoeken aan bod. Daarvoor zullen we eerst enkele benamingen invoeren.

Een *vierhoek* $ABCD$ is een vlakke figuur die wordt verkregen door vier verschillende punten A, B, C en D (hoekpunten) in het vlak te nemen waarbij er geen drie punten op eenzelfde rechte liggen, en de lijnstukken $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ en $[DA]$ (zijden) te tekenen. De lengtes van die zijden zullen we respectievelijk met a, b, c, d noteren. De lijnstukken $[AC]$ en $[BD]$ noemen we de *diagonalen* van de vierhoek, en hun lengtes noteren we respectievelijk met p en q. Als de zijden van de vierhoek elkaar enkel in de hoekpunten snijden, dan noemen we de vierhoek *simpel*. Als daarenboven de vierhoek volledig aan eenzelfde kant van elke (verlengde) zijde ligt, dan zeggen we dat de vierhoek *convex* is. Is een vierhoek simpel en is er minstens één zijde waarvoor de vierhoek niet aan dezelfde kant van die (verlengde) zijde ligt, dan noemen we de vierhoek *concaaf*. Een vierhoek die niet simpel is, noemen we *gekruist* (of *complex*). Figuur 13 illustreert enkele benamingen die we zonet hebben ingevoerd.



Figuur 13: (1) een simpele, convexe vierhoek, (2) een simpele concave vierhoek en (3) een gekruiste vierhoek

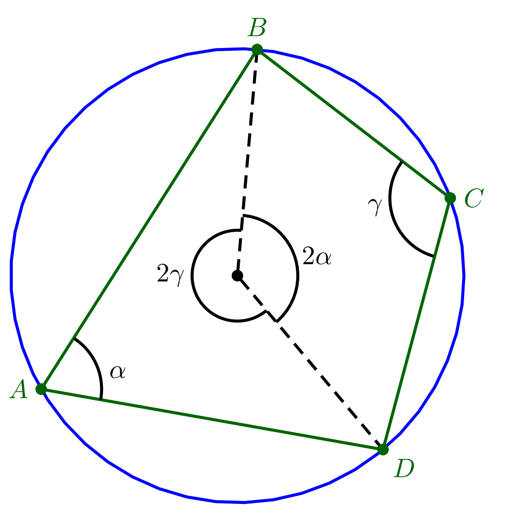
Een *koordenvierhoek* is een vierhoek waarvan de vier hoekpunten op een cirkel liggen. Zo is bijvoorbeeld elke rechthoek, en algemener elk gelijkbenig trapezium een koordenvierhoek. Een koordenvierhoek hoeft niet convex te zijn. Dat is bijvoorbeeld het geval met een zogenaamd *antiparallellogram*; een gekruiste vierhoek waarbij de overstaande zijden even lang zijn, dus waarbij $a = c$ en $b = d$.

10.1. **De stelling van Ptolemaeus in een koordenvierhoek.** Hieronder zal het volgend hulpresultaat van pas komen. De tweede uitspraak is een onderdeel van de beroemde stelling van Claudius Ptolemaeus (87-150 n.Chr.). De bewijzen zonder woorden steunen op basiseigenschappen van een cirkel: (a) een omtrekshoek is half zo groot als de middelpuntshoek die op dezelfde boog staat en (b) middelpuntshoeken op dezelfde boog zijn gelijk.

Lemma 5. Beschouw een koordenvierhoek $ABCD$. Dan geldt:

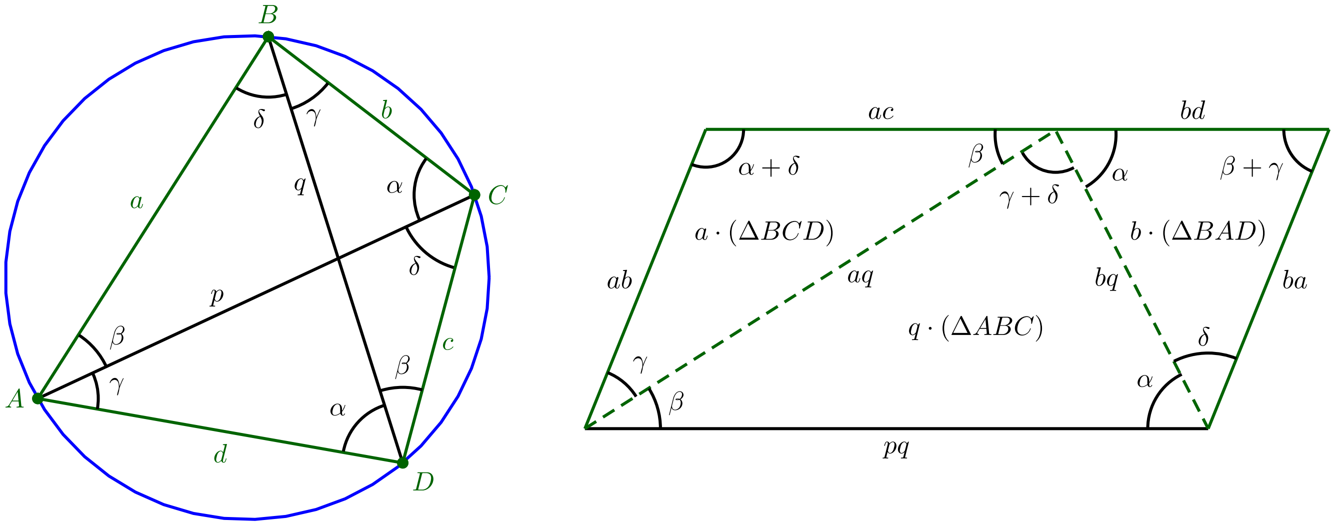
(a) de som van twee overstaande binnenhoeken is $180°$, en
(b) $ac + bd = pq$.

Bewijs van (a) zonder woorden.



Figuur 14 $\square$

Bewijs van (b) zonder woorden van Derrick en Herstein [8].



Figuur 15: $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180° \Rightarrow pq = ac + bd$. □

We merken op dat ook de omgekeerde eigenschap van Lemma 5, deel (a) waar is: als $ABCD$ een willekeurige vierhoek is waarbij de som van een tweetal overstaande binnenhoeken gelijk is aan 180°, dan is $ABCD$ een koordenvierhoek. De omgekeerde eigenschap van (b) is enkel waar als de vierhoek $ABCD$ convex is.

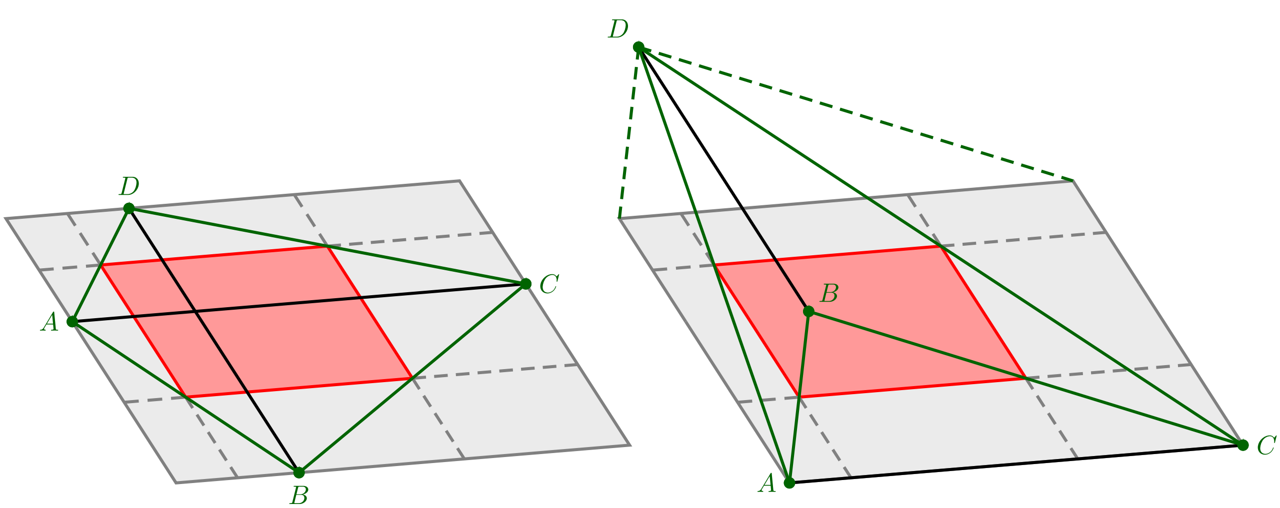
10.2. **De stelling van Varignon in een vierhoek.** Ons laatste hulpresultaat is genoemd naar Pierre Varignon, die als eerste een strak bewijs van deze eigenschap gaf. Zijn redenering werd in 1731, negen jaar na zijn dood, gepubliceerd [30]. Het bewijs van deel (a) wordt als oefening voor de lezer gelaten. Merk daarbij op dat we ook rekening houden met een gekruiste vierhoek, waarbij het kan voorkomen dat de diagonalen evenwijdig zijn aan elkaar.

Lemma 6 (stelling van Varignon). Beschouw een vierhoek $ABCD$.

(a) De middens van de opeenvolgende zijden van de vierhoek vormen
- een parallellogram als de diagonalen van de vierhoek niet evenwijdig zijn,
- een lijnstuk als de diagonalen van de vierhoek wel evenwijdig maar niet even lang zijn, en
- een punt als de diagonalen van de vierhoek evenwijdig en even lang zijn.

(b) Als de vierhoek $ABCD$ simpel is, dan is de oppervlakte van de vierhoek gelijk aan het dubbele van de oppervlakte van het parallellogram gevormd door de middens van de opeenvolgende zijden van de vierhoek.

Bewijs van (b) zonder woorden voor een convexe vierhoek en voor een concave vierhoek.



Figuur 16: opp. vierhoek $ABCD = \frac{1}{2} \times \left(\text{opp. } \square + \text{opp. } \blacksquare\right) = 2 \times \text{opp. } \blacksquare$. □

11. De formule van Dostor voor de oppervlakte van een simpele vierhoek en het bewijs van Hobson

De formule van Heron drukt de oppervlakte van een driehoek uit in functie van de zijden. Een voor de hand liggende vraag is of een soortgelijke formule ook kan gevonden worden voor een vierhoek. Het antwoord hierop mocht in dit artikel niet ontbreken.

Is $ABCD$ een koordenvierhoek met lengtes der opeenvolgende zijden a, b, c en d dan wordt de oppervlakte gegeven door de zogenaamde *formule van Brahmagupta* die een treffende gelijkenis met de formule van Heron vertoont:

$$\text{opp. } ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}. \tag{1}$$

Zoals gebruikelijk staat s voor de halve omtrek, dus $s = \frac{a+b+c+d}{2}$. In het bijzonder geval van een rechthoek met $a = c$ en $b = d$ is $s = a + b$. In dit geval geeft de formule van Brahmagupta $\sqrt{(s-a)^2(s-b)^2} = (s-a)(s-b) = ba$ wat inderdaad de oppervlakte van de rechthoek uitdrukt. De formule van Brahmagupta is vernoemd naar de Indiase wiskundige Brahmagupta (598 - 668) die als eerste een formule voor de oppervlakte van een koordenvierhoek in functie van de zijden vond, maar ze niet bewees [1].

De formule van Brahmagupta kan nog verder veralgemeend worden. Is $ABCD$ een convexe vierhoek met zijden a, b, c en d dan wordt de oppervlakte gegeven door de formule van Bretschneider-Strehlke, naar Carl Bretschneider [4] en Friedrich Strehlke [27] die ze in 1842 onafhankelijk van elkaar gevonden hebben:

$$\text{opp. } ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2\left(\frac{\theta+\lambda}{2}\right)} \tag{2}$$

waarbij θ en λ twee inwendige hoeken van de vierhoek zijn die geen zijde gemeen hebben. Wegens Lemma 5 en de daaropvolgende opmerking liggen de hoekpunten van de vierhoek op een cirkel als en slechts als $\theta + \lambda = 180°$, en in dat geval geeft de formule van Bretschneider-Strehlke (2) ons de formule van Brahmagupta (1).

De oorspronkelijke bewijzen van Bretschneider en Strehlke waren niet erg elegant [6]. Na 1842 verschenen nog alternatieve formules voor de oppervlakte van een willekeurige vierhoek, zoals de onderstaande formule (3) in de publicatie van Georges Dostor 1848 [10] en formule (4) uit de hand van Coolidge 1939 [6]:

$$\text{opp. } ABCD = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2} \tag{3}$$

$$= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - \frac{1}{4}(ac+bd+pq)(ac+bd-pq)}. \tag{4}$$

Hierbij staan p en q voor de lengtes van de diagonalen van de vierhoek. Voor andere formules verwijzen we naar het historisch overzichtsartikel van Raymond Archibald [1].

In deze paragraaf stellen we als doel om één van deze formules voor de oppervlakte van een willekeurige vierhoek aan te tonen. Dat resultaat zal leiden tot een bewijs van de formule van Brahmagupta, wat op zijn beurt een bewijs voor de formule van Heron geeft.

Een kort, eenvoudig en elegant bewijs van de formule van Dostor (3) vonden we in het boek van Ernest Hobson uit 1891 [17]. Zijn redenering verscheen later ook als Charles Pinzka's oplossing van een probleem in een editie van de *American Mathematical Monthly* uit 1959 [18]. Naast formule (2) wordt ook formule (3) vaak de formule van Bretschneider of Bretschneider-Strehlke genoemd, maar dat is niet helemaal terecht, omdat deze uitdrukking niet in hun artikels voorkomt (zie ook [31]).

Stelling (formule van Dostor). Beschouw een simpele vierhoek $ABCD$. Dan geldt:

$$\text{opp. } ABCD = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2}.$$

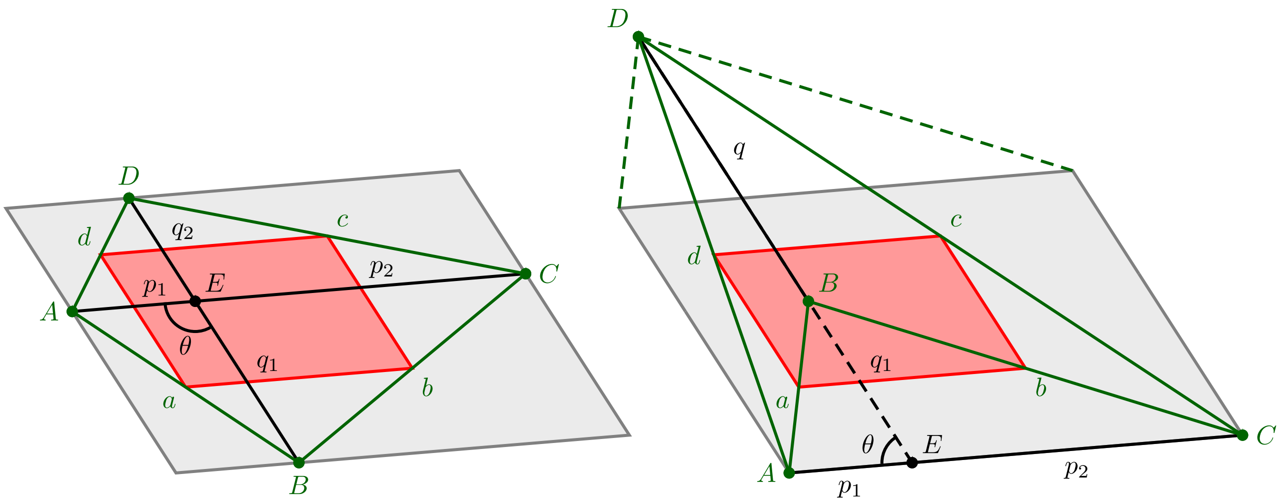
Bewijs van Hobson [17]. In Figuur 17 maken we onderscheid tussen een convexe vierhoek (linkerfiguur) en een concave vierhoek (rechterfiguur). In elk geval noemen we E het snijpunt van de twee diagonalen, $\theta = A\widehat{E}B$ en stellen we

$$p_1 = |AE|, \quad p_2 = |CE|, \quad q_1 = |BE| \quad \text{en} \quad q_2 = |DE|.$$

Uit ons bewijs van Lemma 6 (b) in Figuur 16 volgt dat

$$\text{opp. } ABCD = \frac{1}{2}pq\sin\theta = \frac{1}{2}pq\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{1}{4}\sqrt{4p^2q^2 - (2pq\cos\theta)^2}.$$

Om de formule van Dostor te bewijzen, volstaat het om aan te tonen dat $2pq\cos\theta = \pm(b^2 + d^2 - a^2 - c^2)$.



Figuur 17

Is de vierhoek $ABCD$ convex (linkerfiguur), dan is $p = p_1 + p_2$ en $q = q_1 + q_2$ zodat

$$\begin{aligned}
2pq\cos\theta &= 2(p_1 + p_2)(q_1 + q_2)\cos\theta \\
&= 2p_1q_1\cos\theta + 2p_1q_2\cos\theta + 2p_2q_1\cos\theta + 2p_2q_2\cos\theta \\
&= 2p_1q_1\cos\theta - 2p_1q_2\cos(180^\circ - \theta) - 2p_2q_1\cos(180^\circ - \theta) + 2p_2q_2\cos\theta \\
&= -a^2 + d^2 + b^2 - c^2,
\end{aligned}$$

waarbij we in de laatste overgang voor elke term de cosinusregel (zie Lemma 1) hebben toegepast. Is daarentegen de vierhoek $ABCD$ concaaf (rechterfiguur), dan vinden we

$$\begin{aligned}
2pq\cos\theta &= 2(p_1 + p_2)(q_2 - q_1)\cos\theta \\
&= 2p_1q_2\cos\theta - 2p_1q_1\cos\theta + 2p_2q_2\cos\theta - 2p_2q_1\cos\theta \\
&= 2p_1q_2\cos\theta - 2p_1q_1\cos\theta - 2p_2q_2\cos(180^\circ - \theta) + 2p_2q_1\cos(180^\circ - \theta) \\
&= -d^2 + a^2 + c^2 - b^2.
\end{aligned}$$

□

Als bijzonder geval volgt nu de formule voor de oppervlakte van een koordenvierhoek.

Stelling (formule van Brahmagupta). Beschouw een koordenvierhoek $ABCD$. Dan geldt:

$$\text{opp. } ABCD = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} \quad \text{waarbij } s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Bewijs. Wegens Lemma 5 is $ac + bd = pq$. De vorige stelling geeft nu:

$$\begin{aligned}
\text{opp. } ABCD &= \frac{1}{4}\sqrt{4(ac+bd)^2 - (b^2+d^2-a^2-c^2)^2} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\Big(2(ac+bd) - (b^2+d^2-a^2-c^2)\Big)\Big(2(ac+bd) + (b^2+d^2-a^2-c^2)\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\Big((a^2+2ac+c^2) - (b^2-2bd+d^2)\Big)\Big((b^2+2bd+d^2) - (a^2-2ac+c^2)\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{\Big((a+c)^2 - (b-d)^2\Big)\Big((b+d)^2 - (a-c)^2\Big)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(a+c-b+d)(a+c+b-d)(b+d-a+c)(b+d+a-c)} \\
&= \frac{1}{4}\sqrt{(2s-2b)(2s-2d)(2s-2a)(2s-2c)} \\
&= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.
\end{aligned}$$

□

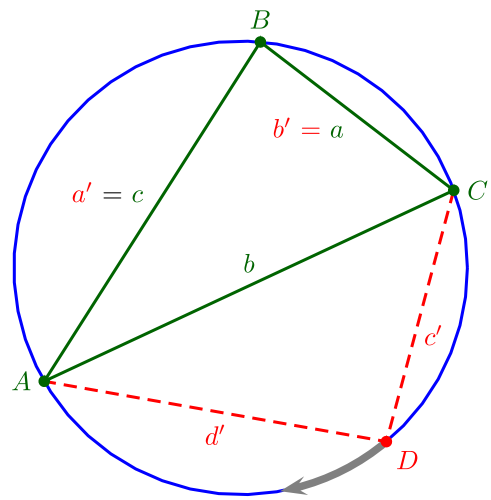
Tot slot vinden we, opnieuw als bijzonder geval, een bewijs voor de formule van Heron.

Stelling (formule van Heron). Beschouw een driehoek met hoekpunten A, B en C. Dan geldt:

$$\text{opp. } \Delta ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{waarbij } s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Bewijs. Op de omgeschreven cirkel van ΔABC nemen we een punt D dat tussen A en C gelegen is, zie Figuur 18. Noemen we $a' = c$, $b' = a$, $c' = |CD|$ en $d' = |DA|$ dan volgt uit de voorgaande stelling:

$$\begin{aligned} \text{opp. } ABCD &= \sqrt{(s-a')(s-b')(s-c')(s-d')} \quad \text{waarbij } s = \frac{a'+b'+c'+d'}{2} \\ &= \sqrt{(s-c)(s-a)(s-c')(s-d')} \quad \text{waarbij } s = \frac{c+a+c'+d'}{2}. \end{aligned}$$



Figuur 18

Laten we het punt D nu langs de cirkelboog naderen naar het punt A, dan zal d' evolueren naar nul terwijl c' zal naderen naar b. In de limiet vinden we dan:

$$\text{opp. } ABCA = \text{opp. } ABC = \sqrt{(s-c)(s-a)(s-b)(s-0)} \quad \text{waarbij } s = \frac{c+a+b+0}{2}$$

waarmee de formule van Heron bewezen is. □

Als slotbemerking willen we de lezer wijzen op enige voorzichtigheid: zomaar d gelijk aan nul stellen in de formule van Brahmagupta zou enkel mogen als we de geldigheid van de formule gecontroleerd hebben in het geval één van de zijden van de koordenvierhoek lengte nul heeft, hetgeen we niet expliciet gedaan hebben.

12. Andere bewijzen

Uiteraard zijn er in de literatuur ook nog andere bewijzen van de formule van Heron te vinden.

Het oorspronkelijke bewijs van Heron staat in zijn *Metrica* en telt meteen als het oudst bekende bewijs van zijn formule. Het bestaat uit het samenbrengen van een aantal schijnbaar niet gerelateerde meetkundige identiteiten en steunt op eigenschappen van koordenvierhoeken en rechthoekige driehoeken. Pas in de laatste regels komen alle ingrediënten samen, wat leidt tot een heerlijke climax die de lezer verwonderd achterlaat. Voor een toegankelijke neerslag hiervan verwijzen we naar [12, Chapter 5].

In 1738 publiceerde Leonhard Euler in zijn artikel *Variae demonstrationes geometriae* een bewijs van de formule van Heron, min of meer in de stijl van de klassieke oudheid. Het maakt gebruik van de ingeschreven cirkel (meer bepaald van Lemma 2 in paragraaf 7), in combinatie met een aantal vernuftige hulplijnen en congruentie van bepaalde driehoeken. Het bewijs, waarmee Euler zijn bijnaam 'de incarnatie van efficiëntie' [13, p.59] opnieuw alle eer aandeed, kan nagelezen worden in [12, Chapter 5]. Vermeldenswaardig is dat hij uit de formule van Heron de relatie

$$16A^2 = 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - a^4 - b^4 - c^4$$

haalde, waarbij A staat voor de oppervlakte van een driehoek met zijden a, b en c. Dit verband staat centraal in zijn berekening van de coördinaatgetallen van het hoogtepunt, het zwaartepunt en het middelpunt van een willekeurige driehoek, waaruit hij kon afleiden dat deze drie punten altijd op een rechte leggen. Deze eigenschap was de wiskundigen uit het oude Griekenland blijkbaar ontgaan. Ter ere van zijn ontdekker wordt deze lijn *de rechte van Euler* genoemd.

Op zich is het een interessant gegeven dat wiskundigen uit de moderne tijd op zoek zijn gegaan naar andere invalshoeken om de formule van Heron te bewijzen. Zo werden bewijzen gevonden die gebruik maken van kegelsneden, zoals het bewijs van Victor Thébault uit 1945 [28], steunend op gevorderde eigenschappen van ellipsen en hyperbolen. Of meer recent dat van David Gau, die enkel elementaire eigenschappen van ellipsen nodig had [15]. Een prachtig samenspel van de ingeschreven cirkel en een aangeschreven cirkel van een driehoek vinden we in het bewijs van Sidney Kung uit 1992 [19].

Referenties

[1] R.C. Archibald, *The area of a quadrilateral*, The American Mathematical Monthly, Vol. 29, No. 1, p.29-36, 1922.
[2] J.P. Ballantine, *Note on Hero's formula*, The American Mathematical Monthly, Vol. 61, p.337, 1954.
[3] C. B. Boyer, *A History of Mathematics*, 2e editie, John Wiley & Sons, Inc, 1991.
[4] C.A. Bretschneider, *Untersuchung der trigonometrischen Relationen des geradlinigen Viereckes*, Archiv der Math. 2, p.225-261, 1842.
[5] J.J O'Connor, E.F. Robertson, *Heron of Alexandria*.
Opgehaald van http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Biographies/Heron.html
[6] J.L. Coolidge, *A Historically Interesting Formula for the Area of a Quadrilateral*, The American Mathematical Monthly, Vol. 46, p.345-347, 1939.
[7] H.S.M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd ed. New York: Wiley, 1969.
[8] W. Derrick, J. Herstein, *Proof Without Words: Ptolemy's Theorem*, The College Mathematics Journal, Vol. 43, No. 5, p.386 2012.
[9] D.E. Dobbs, *Proving Heron's formula tangentially*, The College Mathematics Journal, Vol. 15, p.252-253, 1984.
[10] G. Dostor, *Aire d'un quadrilatère quelconque*, Nouvelles Annales de Mathématiques, vol. 7, p.69-75, 1848.
[11] W. Dunham, *An ancient/modern proof of Heron's formula*, Mathematics Teacher, Vol. 78, No. 4, p.258-259, 1985.
[12] W. Dunham, *Journey through genious: the great theorems of mathematics*, Penguin Books, 1991.
[13] W. Dunham, *Euler: the master of us all*, MAA Dolciani Series, No. 22, 1999.
[14] H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*, 5th Ed. Philadelphia, Saunders, 1983.
[15] Y.D. Gau, *An elliptic proof of Heron's area formula*.
Opgehaald van http://web.csulb.edu/ ydgau/Heron.pdf.
[16] E. Grigorieva, *Methods of Solving Complex Geometry Problems*, Birkhäuser, Springer International Publishing Switzerland, 2013.
[17] E.W. Hobson, *A treatise on plane trigonometry*, Cambridge University Press, London, 1891.
[18] V.F. Ivanoff, C.F. Pinzka, J. Lipman, *Solution to Problem E1376: Bretschneider's Formula*, The American Mathematical Monthly, Vol. 67, No. 3, p.291-292, 1960.
[19] S.H. Kung, *Another proof of Heron's formula*, Mathematics Magazine, Vol. 65, No. 5, p.337-338, 1992.
[20] R.B. Nelsen, *Proofs without words: exercises in visual thinking*, Mathematical Association of America, Washington, 1993.
[21] R.B. Nelsen, *Heron's formula via proofs without words*, The College Mathematics Journal, Vol. 32, No. 4, 2001.
[22] O. Neugebauer, *Über eine Methode zur Distanzbestimmung Alexandria-Rom bei Heron*, København, Levin & Munksgaard, Ejnar Munksgaard, 1938.
[23] I. Niven, *Maxima and minima without calculus*, MAA Dolciani Series, No. 6, 1981.
[24] B. Oliver, *Heron's remarkable triangular area formula*, Mathematics Teacher, Vol. 86, No. 2, p.161-163, 1993.
[25] V. Pratt, *Factoring Heron*, The College Mathematics Journal, Vol. 40, No. 1, 2009.
[26] C.H. Raifaizen, *A simpler proof of Heron's formula*, Mathematics Magazine, Vol. 44, p.27-28, 1941.
[27] F. Strehlke, *Zwei neue Sätze vom ebenen und shparischen Viereck und Umkehrung des Ptolemaischen Lehrsatzes*, Archiv der Mathematik und Physik, Vol. 2, p.323-326, 1842.
[28] V. Thébault, *The area of a traingle as a function of the sides*, The American Mathematical Monthly, Vol. 52, p.508-509, 1945.
[29] B.L. van der Waerden, *Science Awakening*, Oxford University Press, New York, 1961.
[30] P. Varignon, *Elemens de Mathematique de Monsieur Varignon*, Pierre-Michel Brunet, Fils, Paris, 1731.
[31] E.W. Weisstein, *Bretschneider's Formula* From MathWorld - A Wolfram Web Resource. Opgehaald van http://mathworld.wolfram.com/BretschneidersFormula.html
[32] Wikipedia, *Aeolipile*.
Opgehaald van https://en.wikipedia.org/wiki/Aeolipile
[33] Wikipedia, *Bibliotheek van Alexandrië*.
Opgehaald van https://nl.wikipedia.org/wiki/Bibliotheek_van_Alexandrië

Koen De Naeghel, Onze-Lieve-Vrouwecollege, Collegestraat 24, 8310 Brugge.
E-mail address, K. De Naeghel: `koendenaeghel@hotmail.com`