

INFOSESSIE WISKUNDE 8 UUR

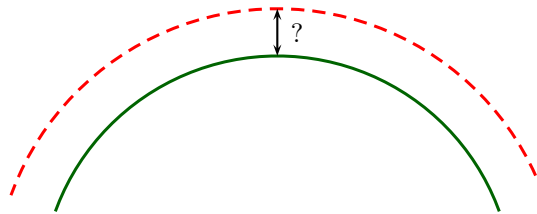
KOEN DE NAEGHEL

DOELSTELLING. Tijdens de infosessie wiskunde 8 uur krijg je de tijd om samen met enkele andere leerlingen na te denken over de onderstaande problemen. Het eerste probleem is voor iedereen haalbaar, daarna wordt het moeilijker. Het is zeker niet de bedoeling om naargelang het al of niet kunnen oplossen van deze problemen je een richting met 6 uur of 8 uur wiskunde aan- of af te raden. Wel willen we, na het groepswerk, aan de hand van deze problemen en de manier waarop je erover nadacht het een en ander duidelijk maken.

Warming-up. Los het volgend raadsel op.

*Johnson's cat went up a tree,
Which was sixty feet and three;
Every day she climbed eleven,
Every night she came down seven.
Tell me, if she did not drop,
When her paws would touch the top.*

Probleem 1. Stel dat je een enorm lang touw hebt. Je legt dat touw over de evenaar, zodanig dat het touw een cirkel om de aarde vormt. Nu maak je het touw 1 meter langer. Hoe ver moet het touw dan overal van de grond zijn om een nieuwe cirkel rond de evenaar te krijgen? Voor de eenvoud mag je veronderstellen dat de aarde bolvormig is met straal 6371 km.



Probleem 2. Voor elk woord kun je de volgende procedure toepassen:

Stap 1. Tel het aantal letters van het gekozen woord. Dat is een natuurlijk getal.

Stap 2. Als je dat natuurlijk getal voorleest, verkrijg je een nieuw woord.

Stap 3. Vervang het oude woord door het nieuwe woord en ga terug naar Stap 1.

In deze context hoeft een *woord* niet in een woordenboek te staan, maar bedoelen we elke eindige opeenvolging van letters uit het Latijnse alfabet waarvan de volgorde belangrijk is. Zo zijn *wiskunde* en *wuskinde* twee verschillende woorden.

- Pas de procedure toe op het woord *banaan* en enkele andere, eigen gekozen woorden.
- Formuleer een vermoeden.
- Stel een plan op om jouw vermoeden te bewijzen.
- Wat als we overschakelen naar een andere taal zoals Frans, Engels of Duits?

Probleem 3.¹ De rij van Fibonacci wordt gegeven door

$$(f_n) = 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

waarbij elke term gelijk is aan de som van de twee vorige termen. Hieronder staat een redenering die leidt tot

$$1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + \dots = -2.$$

Beoordeel deze redenering en argumenteer je antwoord.

Noem $S = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \dots$

Dan is

$$\begin{array}{r} S = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + \dots \\ S = 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + \dots \\ + \hline 2S = 1 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + \dots \end{array}$$

waaruit $2S + 2 = S$.

Hieruit volgt dat $S = -2$.

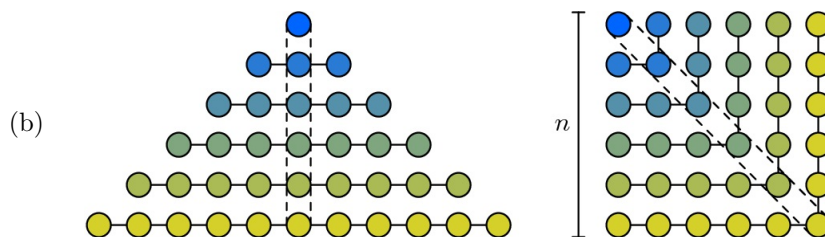
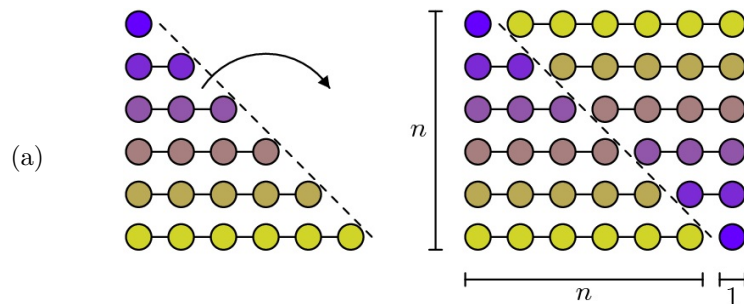
Probleem 4. Bewijs dat voor elk natuurlijk getal p het getal $p(p+1)(p+2)(p+3) + 1$ het kwadraat is van een natuurlijk getal.

Probleem 5. Voor een willekeurig natuurlijk getal n voeren we de volgende procedure uit. Eerst berekenen we de som van de cijfers van n . Het resultaat is een natuurlijk getal, die je opnieuw vervangt door de som van zijn cijfers, enzovoort. Starten we bijvoorbeeld met het getal 65 537, dan verkrijgen we de rij:

$$65\ 537, 26, 8, 8, 8, \dots$$

waarbij we al na twee stappen op een getal met één cijfer stranden. Bepaal nu zelf een natuurlijk getal waarbij het precies 2018 stappen duurt alvorens je het getal 7 verkrijgt.

Cooling down. Hieronder staan twee *bewijzen zonder woorden* afgebeeld. Formuleer telkens de eigenschap die je met behulp van de figuur kan bewijzen.² Kun je deze eigenschappen nu ook met woorden bewijzen?



¹Inspiratie voor dit probleem werd ontleend aan L. Gheysens, *Mijn Fibonacciparadox*, Wiskunde & Onderwijs **174**, p.135-137, 2018.

²Bron figuren: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php?title=Proofs_without_words.